MATEMÁTICAS

ÁREA: BÁSICA CLAVE DE LA ASIGNATURA: LA 102

OBJETIVO(S) GENERAL(ES) DE LA ASIGNATURA:

Al término del curso, el alumno analizará los principios de las matemáticas; aplicará los mismos como herramientas para operar en los comportamientos estadísticos, económicos y en particular los administrativos, dentro de las organizaciones.

2. Álgebra

El álgebra es, en esencia, la doctrina de las operaciones matemáticas analizadas desde un punto de vista abstracto y genérico, independiente de los números u objetos concretos. A lo largo de la historia de la humanidad esta ciencia ha ido evolucionando, y cada civilización y cada cultura con sus características propias han dejado un legado testimonial escrito del que en la actualidad somos herederos. (Lorente, 2007.)

2.4 Funciones matemáticas

Con frecuencia en las aplicaciones prácticas el valor de una variable depende del valor de otra. Por ejemplo, el salario de una persona puede depender del número de horas que trabaje. La relación entre este tipo de cantidades suele expresarse mediante una función. Para fines exclusivos del tema, las cantidades involucradas en estas relaciones son números reales.

Una función pude considerarse como una correspondencia de un conjunto A de numero reales x a un conjunto B de números reales y, donde el número y es el único para cada valor específico de x.

Observa que una función son tres cosas: el conjunto A donde está definida, el conjunto B donde toma valores y la regla que la define. En este curso estamos interesados principalmente en funciones entre conjuntos de números reales, es decir, A y B son subconjuntos de R; con frecuencia B=R. Estas funciones se llaman **funciones reales de una variable real.**

Por tanto, para darnos una función nos deben decir, en principio, el subconjunto A de R donde suponemos que la función está definida y la regla que asigna a cada número de A un único número real. El conjunto A recibe el nombre de **dominio** de la función.

Las funciones se representan por letras. En la practica las letras más usadas son f , g y h, pero cualquiera otra es también buena. Si f es una función y x es un número que está en su dominio, se representa por f(x) (léase “f de x” o, mucho mejor, “f evaluada en x” o “el valor de f en x”) el número que f asigna a x, que se llama **imagen** de x por f .

Es muy importante distinguir entre f (una función) y f(x) (un número real).

El símbolo $f: A \to R$ se utiliza para indicar que f es una función cuyo dominio es A (se supone, como hemos dicho antes, que A es un subconjunto de R). También es frecuente usar el simbolismo $x \mapsto f(x),\ (x \in A)$

Es importante advertir que las propiedades de una función dependen de la regla que la define y también de su dominio, por ello dos funciones que tienen distintos dominios se consideran distintas funciones aunque la regla que las defina sea la misma.

Dos funciones f y g son iguales cuando tienen igual dominio y f (x)=g(x) para todo x en el dominio común.

Notemos también que aunque estamos acostumbrados a representar a las funciones mediante fórmulas, no siempre es posible hacerlo.

Ejemplo, Consideremos las funciones siguientes.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = x^2$.

b) $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la función dada por $g(x) = x^2$.

Según lo antes dicho, las funciones en a) y b) son distintas. De hecho tienen propiedades distintas. Observa que la función definida en b) es creciente y la definida en a) no lo es.

Operaciones con funciones

Suma, producto y cociente de funciones. Dadas dos funciones $f, g: A \to R$, se define su función suma (resp. producto) como la función que a cada número $x \in A$ asigna el número real f(x)+g(x) (respectivamente f(x)g(x)). Dicha función se representa con el símbolo f + g (respectivamente fg). Se define la función cociente de f por g como la función que a cada número $x \in A$ x 2 con $g(x) \neq 0$ asigna el número real $\frac{f(x)}{g(x)} \in A$ Dicha función se representa por $\frac{f}{g}$.

Las propiedades de la suma y el producto de funciones son las que cabe esperar y su demostración es inmediata pues se reducen a las correspondientes propiedades de los números.

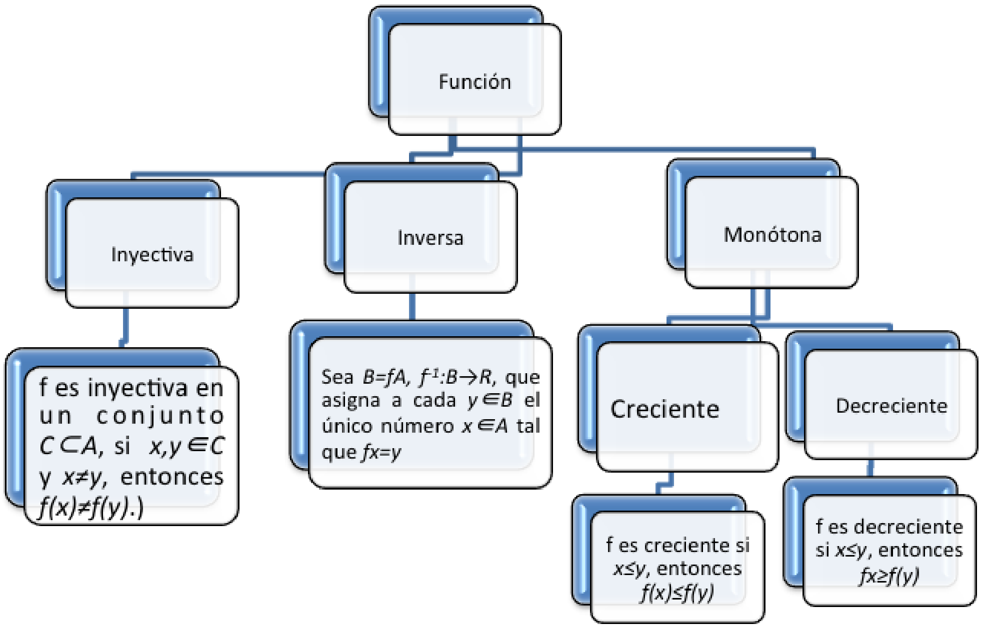
Sean $f, g, h: A \to R$ funciones cualesquiera, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

Asociativas. $(f + g) + h = f + (g + h)$; $(fg)h = f(gh)$

Conmutativas. $f + g = g + f$; $fg = gf$

Distributiva. $(f + g)h = fh + gh$

Sean $f: A \to R$ $g: B \to R$ funciones con $f(A) \subset B$. En tal caso, la función $h: A \to R$ dada por $h(x) = g(f(x))$ para todo $x \in A$ se llama **composición** de g con f y se representa por $h = g \circ f$. Observa que la función $h = g \circ f$, solamente está definida cuando la imagen de f está contenida en el dominio de g. La composición de funciones es asociativa.



Gráfica de funciones

La gráfica de una función $f: A \to R$ es el conjunto de pares de números $\{(x, f(x)) \mid x \in A\}$.

La gráfica de una función pone de manifiesto, a simple vista, muchas de sus propiedades. Para dibujar gráficas de funciones se precisan herramientas de cálculo que estudiaremos más adelante.

2.5 Ecuaciones algebraicas

En este tema el estudiante desarrollará destrezas y habilidades en la solución de ecuaciones lineales y cuadráticas en los números reales y complejos, así como en la solución algebraica de sistemas de ecuaciones lineales por cualquiera de sus métodos.

Ecuaciones Lineales

Retomando el concepto de expresión algebraica, una igualdad entre dos expresiones algebraicas en las que al menos una de éstas involucra una variable o incógnita se denomina ecuación.

Específicamente, se consideran los números reales $a, b \ y \ c$ con $a \neq 0$. Se denomina ecuación lineal con una incógnita a cualquier ecuación del tipo:

$$ax + b = c.$$

A este tipo de ecuaciones también se le denomina de primer grado por ser el valor uno el exponente de la variable . A continuación se muestran algunos ejemplos de ecuaciones primer grado:

$$x + 1 = 0, \ \ 2x + 2 = 2, \ \ \frac{x}{2} + 1 = 5$$

Propiedades de la igualdad

En este tipo de ecuaciones, cualquier número que se encuentre contenido en el conjunto solución de la variable donde esta se ha definida, y que al evaluar la ecuación en ese número hace que la igualdad obtenga un valor lógico verdadero, es una solución de la ecuación. Por ejemplo, la ecuación $x + 1 = 0$, al ser evaluada en el valor 2 da por resultado: $2 + 1 = 0, \ 3 = 0$, que es falso. Si al contrario se evalúa en el valor -1, $-1 + 1 = 0, \ 0 = 0$, que es verdadero, entonces $x = -1$ es una solución de la ecuación debido a que satisface la igualdad.

A las soluciones de una ecuación también se les denomina raíces de la ecuación.

Solución de ecuaciones lineales

Resolver una ecuación significa determinar su conjunto solución, es decir, el conjunto de todas sus raíces. Si dos ecuaciones poseen el mismo conjunto solución, entonces son ecuaciones equivalentes.

Un método que se utiliza para resolver ecuaciones lineales es reemplazar la ecuación por una cadena de ecuaciones equivalentes, transformando la ecuación en otras equivalentes a la original con el objetivo de llegar a expresiones más simples hasta obtener una ecuación de la forma x=c, donde x es una incógnita y c es una constante en los números reales.

Con lo anterior y para la solución de ecuaciones de primer grado, se deben estudiar las transformaciones para obtener ecuaciones equivalentes. Estas transformaciones se originan en las siguientes afirmaciones:

- Intercambiar la ecuación: ax + b = c es equivalente a c= ax + b.
- Sumar el mismo número: ax + b = c es equivalente ax + b + d= c + d.
- Multiplicar ambos miembros por un número distinto de cero: ax + b= c es equivalente a d(ax+b) = dc.
- Las propiedades de la adición y la multiplicación definidas en los reales.

Los resultados anteriores indican el camino para la solución de ecuaciones de primer grado en una variable, y de manera específica para una ecuación de la forma ax+b=c , después de aplicar el teorema, se tiene que la solución a esta ecuación está dada por la expresión: x=(b+c)/a.

Ejemplo: Determinar la raíz de la ecuación -2x + 4 = 6

$$
\begin{aligned}
&-2x + 4 = 6\\
&x = \frac{6-4}{-2}\\
&x = \frac{2}{-2}\\
&x = -1
\end{aligned}
$$

En general, es excelente práctica verificar el resultado, evaluando la ecuación original en el valor x= -1:

$$
\begin{aligned}
&-2(-1) + 4 = 6\\
&2 + 4 = 6\\
&6 = 6
\end{aligned}
$$

Al resultar una afirmación verdadera como se había previsto, también se le denomina identidad.

Ecuaciones Cuadráticas

Al considerar el producto notable: $(x+y)(x-y)=x^2 - y^2$, un caso particular de éste se tiene con y=1, $(x+1)(x-1)=x^2-1$. ¿Qué significa el proceso sentido inverso? Es decir, que significa $x^2-1=(x+1)(x-1)$?

Lo anterior nos da la pauta para solucionar una ecuación cuadrática, la cual definiremos como aquella expresión algebraica de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad con\ a, b, c\ constantes\ reales\ y\ a \neq 0.$$

Solución de ecuaciones cuadráticas

Sean a, b, c constantes reales con a diferente de cero. Se denomina ecuación cuadrática con una incógnita a toda ecuación que se puede llevar a la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Para determinar las raíces de esta ecuación existen diversas técnicas:

a) Si c=0 y b≠0, por medio de ecuaciones equivalentes se tiene:

$$
\begin{aligned}
&ax^2 + bx + c = 0\\
&ax^2 + bx = 0\\
&x(ax + b) = 0
\end{aligned}
$$

Entonces x=0 o x= -b/a.

b) Si b=0 y c<0, por medio de ecuaciones equivalentes se tiene:

$$
\begin{aligned}
&ax^2 + bx + c = 0\\
&ax^2 + c = 0
\end{aligned}
$$

x^2

Entonces, $x = \sqrt{c/a}$ o $x = -\sqrt{c/a}$ $ax^2 + bx + c = 0$

c) Si a=1, $b \neq 0\ y\ c \neq 0$, el método de factorización notable consiste en convertir la ecuación cuadrática en un producto de binomios, o bien, completando cuadrados.

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$$

Entonces x = x_1, x = x_2

d) Además, existe un método general para resolver una ecuación de segundo grado:

Sean a, b, c constantes reales con a≠0, tales que $ax^2 + bx + c = 0\ y\ \Delta = b^2 - 4ac$, entonces:

Si $\Delta < 0$, no tiene solución en el conjunto de los números reales.
Si $\Delta = 0$, la solución a la ecuación está dada por $x = -b/2a$ y además está raíz es doble.

Si $\Delta > 0$, las soluciones a la ecuación están dadas por las expresiones: $x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ o $x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Ejemplos:

I. Resolver la ecuación $x^2 + x + 6 = 0$: Aplicando el método de factorización notable tenemos $x^2 + x + 6 = (x - 2)(x + 3)$, entonces $x_1 = 2$ y $x_2 = -3$.

II. Resolver la ecuación $x^2 + 4x = 0$; factorizando $x^2 + 4x = x(x + 4) = (x - 0)(x + 4) = 0,\ entonces\ x_1 = 0\ y\ x_2 = -4$.

III. Resolver la ecuación $2x^2 - 7x - 15 = 0$:

$$a = 2;\ \ b = -7;\ \ c = -15;\ \ \Delta = 49 + 120 = 169 > 0$$

Las soluciones están dadas por:

$$x_1 = \frac{7 + \sqrt{169}}{4} = 5$$
$$x_1 = \frac{7 - \sqrt{169}}{4} = \frac{-3}{2}$$

Referencias

Lorente, A. (2007). Historia del álgebra y de sus textos. Universidad Autónoma de Madrid. España. Recuperado de http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/historia/

Montero, G (et al). (2005). Apuntes para la asignatura matemáticas básicas. Fondo Editorial FCA. México, D.F.

Pérez, F. (2008).CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE. Universidad de Granada. España.

Rico C. (2012). Álgebra. RED TERCER MILENIO S.C. Tlalnepantla. Estado de México. México.